פיתוחים אסימפטוטיים בתורת המגיפות

חיבור לשם קבלת התואר "מוסמך" מוגש למדרשת
פיינברג של מכון ויצמן למדע.

מאת דיטר ריין

בהדרכת פרופ' גיליס.

אוגוסט, 1975.

מבוא

בתהליכים סטוכסטיים בהם הסתברויות המעבר אינן פונקציות ליניאריות של המשתנים המקריים, מתעוררים קשיים מרובים בדרך חקירתם המתימטית. כזה הוא התהליך המגיפתי סטוכסטי שבו נעסוק.

הפתרונות המדויקים שנמצאו עבור הסטטיסטיים השונים, במודלים השונים של התהליך אינם מעשיים, כלומר אינם ניתנים לחישוב כאשר גודל האוכלוסיה אינו מאד קטן. מאידך, הפתרונות שהוצגו תחת ההנחה שגודל האוכלוסיה אינסופי אינם מספיק מדויקים. גודל האוכלוסיה כשמדובר במגיפות יכול להיות מסדר גודל של מאות או אלפים. לכן רצוי למצוא פתרונות שיהיו מדויקים עד סדר גודל רצוי שיהיה יחסי לגודל האוכלוסיה.

במשך השנים פיתחו החוקרים מודלים שונים עבור התהליך המגיפתי. ככל שיותר גורמים נכללים במודל הוא נהיה מסובך יותר מבחינה מתימטית.

אני אתיחס לשני המודלים העקריים. המודל הפשוט, החד-ממדי והמודל הכללי הדו-ממדי. מודלים אלה מוצגים בספרו של N. T. J. Bailey משנת 1957 (Math. Theory of Epidemics). אלה הם מודלים בזמן רציף. ההנחות העומדות ביסוד מודלים אלה הן הבאות:

האוכלוסיה בה מדובר היא הומוגנית. אחד או יותר מתוך האוכלוסיה נושא בתחלה את המגיפה בזמן נתון ויכול להעביר אותה ברגע שהוא נפגש לכל אחד מן האוכלוסיה שעדיין לא נפגע. קבוצת האנשים הנושאת את המחלה נקראת נגועים. חלק האוכלוסיה שעדיין לא נפגע במחלה נקרא פגיעים.

מניחים שההסתברות שפגיע נוסף מתוך האוכלוסיה יפגע מהמגיפה בזמן קצר, פרופורציונלית למכפלה בין מספר הפגועים, מספר הפגיעים וקטע הזמן. יש לנו אם כן, הסתברות מעבר שאינה פונקציה ליניארית של המשתנה המקרי כפי שצוין לעיל.

במודל הפשוט מתיחסים לשני חלקים באוכלוסיה בכל זמן וזמן: האנשים שנפגעו במחלה - פגועים ואלה שעדיין לא נפגעו ממנה - פגיעים. במודל הכללי מתיחסים לקבוצת אנשים נוספת העוזבת את האוכלוסיה כתוצאה מבידוד, מוות או הבראה, לאחר שנפגעה במחלה.

בחקירת המודל הפשוט נתקבלו פתרונות מפורשים עבור התפלגות המשתנים המקריים וכן המומנטים, פתרונות שהם כאמור בלתי מעשיים. במודל הכללי הפתרונות נעשים מסובכים הרבה יותר.

כל מודל מתימטי המתאר התנהגות של מגיפה ומנסה להיות מציאותי לתאר את מספר הנפגעים החדשים לאורך זמן מסוים, חיב לכלול בתוכו את עקרון ההסתברות. כאשר דנים במספר גדול של פגיעים ופגועים אנו מצפים שהשפעת הסטטיסטיות תפחת. בנסיבות אלה הגיוני להשתמש בקרוב ראשוני במודל הדטרמיניסטי. במודל דטרמיניסטי אין משתנים מקריים. במודל כזה ניתן לקבוע בדיוק את המצב של התהליך בעתיד בכל זמן וזמן, כאשר נתון המספר ההתחלתי של פגיעים ופגועים וכן קצב הפגיעה וקצב העזיבה.

חוקרים שונים דנו בפיתוחים אסימפטוטיים לתהליכי "Birth & Death" ולתהליך המגיפתי בפרט. הבעיה שעמדה בפניהם ועומדת כעת בפנינו היא להשיג פתרונות עבור הסטטיסטים השונים בתהליך, עד גודל של $(\frac{1}{N})^k$ כאשר N הוא גודל האוכלוסיה. k יקבע לפי דרישות החוקר.

גישה אפשרית אחרת לחקירת הבעיה היא לקחת את המודל הדטרמיניסטי, כאשר N שואף לאינסוף, בקרוב ראשוני. לנסות למצוא תיקונים מסדר גודל של $\frac{1}{N}$ בדמות המודל הסטוכסטי עבור N סופי.

N. T. J. Bailey (1968) בחר בגישה זו. הוא חקר את המשוואה הדיפרנציאלית חלקית המתקבלת עבור הפונקציה יוצרת מומנטים, כדי לקבל תיקון מסדר רצוי. G. H. Weiss הלך בדרכו של Bailey אך בשיטות חישוב פשוטות הרבה יותר הגיע לאותן תוצאות.

D. R. Mcneil ו-N. G. van Kampen הציגו גם הם פיתוח אסימפטוטי. Mcneil התרכז במודל המגיפתי הפשוט ואילו Van-Kampen הכליל את שיטתו לכל תהליכי "Birth & Death" המתקבלים. הם הגדירו משתנה מקרי חדש וע"י חקירת פונקציות הצפיפות שלו ושימוש בשיטות רגילות, מצאו פיתוח אסימפטוטי לפי $N^{-\frac{1}{2}}$.

ראשית נדון במודל החד-מימדי.

תכונה של השיטה אותה נציג עבור המודל החד-מימדי היא בכך שהיא ניתנת ליישום גם במודל הדו-מימדי. שיטותיהם של Bailey, Mcneil, ו- G. Weiss שפותחו עבור המודל החד-מימדי, לא הוכללו עד כה למודל הדו-מימדי. לא ברור אם הכללה כזו אפשרית.

אני נותן שיטה לחישוב המומנטים השונים באופן ישיר ולא נחשב את הפונקציה יוצרת מומנטים כפי שעשו אחרים.

לצורך המשך הדיון נניח כמה הנחות ונגדיר את הדברים הבאים:

בזמן התחלתי, $t=0$, האוכלוסיה מורכבת מ-N בריאים ונגוע אחד. $X(t)$ ייצג את מספר הבריאים בכל זמן וזמן. $P_n(t)$ תוגדר כהסתברות ש-$X(t)$ שווה ל-n.

נניח שההסתברות לקבל נגוע נוסף בזמן Δt כאשר בזמן t היו $X(t)$ בריאים היא: $\beta x(N+1-x)\Delta t$. β הוא קבוע קצב ההדבקה. נגדיר את הפונקציה היוצרת:

$$(1) \qquad G(x,t) = \sum_n P_n(t)\, x^n$$

קיימת שיטה (Bailey, Stochastic Processes, 1964, פרק 7.0) לקבל את המשוואה הדיפרנציאלית עבור $G(x,t)$ כאשר $f_j(x)\Delta t$ היא ההסתברות לשינוי בן j של התהליך $X(t)$ לאורך זמן Δt.

$$\frac{\partial G(x,t)}{\partial t} = \sum_{j\neq 0} (x^j - 1)\, f_j\!\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right) G(x,t)$$

למעשה שיטה זו נובעת ישירות ממשפט העזר של וולד (Wald's Lemma)

במקרה שלנו יש הסתברות מעבר אחת והיא:

$$f_1(x) = \beta x(N+1-x)$$

לכן נקבל:

$$(2) \qquad \frac{\partial G(x,t)}{\partial t} = \beta N x(x-1)\left\{\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{x}{N}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right\}$$

נגדיר

$$(x)_r = x(x-1)(x-2)\dots(x-r+1)$$

אם נגזור את ① r פעמים לפי x נקבל:

$$G_r = \sum_n (n)_r P_n(t) x^{n-r}$$

כאשר נגדיר $$G_r = \frac{\partial^r G}{\partial x^r}$$

אם נציב בנוסחה עבור G_r , $x=1$ נקבל את התוחלת של $(x)_r$.

נגדיר:

$$M_r = [G_r]_{x=1} = \langle (x)_r \rangle$$

נגזור את ② r פעמים לפי x, ע"י שימוש בכלל לייבניץ, ונציב $x=1$. נעשה שינוי משתנים $\tau = \mu N t$ נקבל:

$$③ \quad \frac{dM_r}{d\tau} = rM_r + r(r-1)M_{r-1} - \frac{1}{N}\Big[rM_{r+1} + 2r(r-1)M_r + r(r-1)(r-2)M_{r-1}\Big]$$

תנאי ההתחלה עבור M_r הם:

$$④ \begin{cases} M_0(0) = 1 \\ M_1(0) = 1 \\ M_2(0) = M_3(0) = \dots = M_r(0) = 0 \end{cases}$$

אנו רואים שהמשוואה הדיפרנציאלית עבור M_r מכילה בתוכה את M_{r+1} לכל r . דבר מה שמקשה על מציאת הפתרון

פתרון לבעיה.

נכתוב את M_r כטור חזקות של $\frac{1}{N}$

$$M_r = \mu_r + \frac{\alpha_r}{N} + \frac{\beta_r}{N^2} + \dots \tag{5}$$

נציב את (5) ב-(3) ונקבל:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\mu_r + \frac{\alpha_r}{N} + \frac{\beta_r}{N^2} + \dots\right) = r\left(\mu_r + \frac{\alpha_r}{N} + \frac{\beta_r}{N^2} + \dots\right)$$
$$+ r(r-1)\left(\mu_{r-1} + \frac{\alpha_{r-1}}{N} + \frac{\beta_{r-1}}{N^2} + \dots\right) - \frac{1}{N}\left[r\left(\mu_{r+1} + \frac{\alpha_{r+1}}{N} + \frac{\beta_{r+1}}{N^2} + \dots\right)\right.$$
$$\left. + 2r(r-1)\left(\mu_r + \frac{\alpha_r}{N} + \frac{\beta_r}{N^2} + \dots\right) + r(r-1)(r-2)\left(\mu_{r-1} + \frac{\alpha_{r-1}}{N} + \frac{\beta_{r-1}}{N^2} + \dots\right)\right] \tag{6}$$

נשאיף ב-(6) את N לאינסוף ונקבל:

$$\frac{d\mu_r}{d\tau} = r\mu_r + r(r-1)\mu_{r-1} \tag{7}$$

מ-(4) נובע שתנאי ההתחלה עבור μ_r הם:

$$\mu_0(0) = \mu_1(0) = 1 \,, \quad \mu_r(0) = 0 \qquad \text{לכל } r > 1$$

<u>עבור $r = 1$ נקבל</u>

$$\frac{d\mu_1}{d\tau} = \mu_1 \,, \qquad \mu_1(0) = 1$$

ומכאן:

$$\mu_1 = e^{\tau}$$

עבור $r=2$ נקבל

$$\frac{d\mu_2}{d\tau} = 2\mu_2 + 2e^{\tau} , \qquad \mu_2(0) = 0$$

ומכאן:

$$\mu_2 = 2e^{\tau}(e^{\tau}-1)$$

קל להוכיח בעזרת אינדוקציה כי:

$$\mu_r = r!\, e^{\tau}(e^{\tau}-1)^{r-1}$$

עבור כל r טבעי.

נשווה את מקדמי $\frac{1}{N}$ במשוואה (6) נקבל:

(8) $$\frac{d\alpha_r}{d\tau} = r\alpha_r + r(r-1)\alpha_{r-1} - \Big[r\mu_{r+1} + 2r(r-1)\mu_r + r(r-1)(r-2)\mu_{r-1}\Big]$$

מתוך (4*) נקבל את תנאי ההתחלה:

$$\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \cdots\cdots 0$$

מכאן ניתן לחשב את $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r \ldots$

עבור $r=1$

$$\frac{d\alpha_1}{d\tau} = \alpha_1 - 2e^{\tau}(e^{\tau}-1)$$

ומכאן:

$$\alpha_1 = -2e^{2\tau} + 2e^{\tau}(1+\tau)$$

עבור $r=2$

$$\frac{d\alpha_2}{d\tau} = 2\alpha_2 + 2\alpha_1 - \left[2\mu_3 + 4\mu_2\right]$$

נציב את הביטויים המפורשים ל- α_1, μ_3, μ_2

נקבל:

$$\alpha_2 = 4e^{\tau}(\tau+1) + 4e^{2\tau}(3\tau+2) - 12e^{3\tau}$$

ניתן להמשיך ולחשב כל α_i לפי הסדר.

באותה דרך ניתן למצוא משוואות עבור β_r ולחשב את אותם ישירות כדי להגיע לדיוק מסדר גודל של $\frac{1}{N^2}$.

קל לראות שמתוך $\langle (x)_1 \rangle$, $\langle (x)_2 \rangle, \ldots, \langle (x)_r \rangle$ ניתן לחשב את המומנט הר-י $m_r(t) = \langle X^r \rangle$.

<u>לסכם קבלנו:</u>

$$M_1(\tau) = m_1(\tau) = e^{\tau} + \frac{1}{N}\left[2e^{\tau}(1+\tau) - 2e^{2\tau}\right] + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

$$M_2(\tau) = 2e^{\tau}(e^{\tau}-1) + \frac{1}{N}\left[4e^{\tau}(\tau+1) + 4e^{2\tau}(3\tau+2) + 12e^{3\tau}\right] + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

לכן

$$m_2(\tau) = M_2(\tau) + M_1(\tau) = 2e^{2\tau} - e^{\tau}$$

$$+ \frac{1}{N}\left[6e^{\tau}(\tau+1) + 6e^{2\tau}(2\tau+1) + 12e^{3\tau}\right] + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

$$=$$

ניישם את השיטה עבור המודל הדו-מימדי.

במודל זה האוכלוסיה מורכבת משלושה חלקים: פגיעים, נגועים ואלה העוזבים את האוכלוסיה אחרי שנפגעו, כתוצאה מבידוד, הבראה או מוות.

נסמן

$x(t)$ - מספר הפגיעים בזמן t.

$y(t)$ - מספר הנגועים בזמן t.

$z(t)$ - החלק שעזב את האוכלוסיה עד זמן t.

נניח $x+y+z = N+1$ כשבתחילה יש N פגיעים ונגוע אחד.

β הוא קצב ההדבקה ו- γ הוא קצב העזיבה.

ראשית נדון במודל הדטרמיניסטי.

לפי ההנחות הרגילות יהיו לנו $\beta xy\Delta t$ נגועים נוספים בזמן Δt. אך מלבד זאת יעזבו מספר נגועים את האוכלוסיה. מספר העוזבים את האוכלוסיה בזמן Δt הוא $\gamma y\Delta t$.

התהליך הדטרמיניסטי יתואר באופן מלא ע"י מערכת המשוואות הדיפרנציאליות הבאה:

$$\frac{dx}{dt} = -\beta xy$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta xy - \gamma y$$

$$\frac{dz}{dt} = \gamma y$$

עם תנאי התחלה:

$$(x_0, y_0, z_0) = (N, 1, 0)$$

ניתן לפתור מערכת משוואות זו בדרך מאוד מסובכת ולקבל פתרונות פרמטריים (Bailey, The math. theory of Epidemics, 1957, p. 25)

הפתרון הפרמטרי הנו

$$
\begin{cases}
t = \dfrac{1}{\gamma} \displaystyle\int_0^z \dfrac{dw}{y_0 - w + \rho(1 - e^{-w/\rho})} \\[2ex]
\dfrac{dz}{dt} = \gamma \left\{ y_0 - z + \rho(1 - e^{-z/\rho}) \right\}
\end{cases}
\qquad 1.
$$

כאשר $-\infty < t < \infty$, $-\xi_1 < z < \xi_2$.

ξ_1 ו- ξ_2 הם השורשים החיובי והשלילי של המשוואה

$$y_0 - \xi + \rho(1 - e^{-\xi/\rho}) = 0$$

y_0 - מספר התחלתי של נגועים

ומניחים שהמספר ההתחלתי של פגיעים שווה ל- ρ.

קל לראות ממשוואות המודל הדטרמיניסטי כי אם $\rho > x_0$ לא תפרוץ מגיפה כלל. לכן המספר ההתחלתי של פגיעים חייב להיות גדול או שווה ל-ρ כדי שתפרוץ מגיפה.

נעבר למודל הסטוכסטי.

נגדיר: $P_{rs}(t) = P_r\left[y(t)=r,\ z(t)=s\right]$

$G(y,z,t)$ - פונקציה יוצרת

$$G(y,z,t) = \sum_{r,s} P_{rs}(t)\, y^r z^s$$

נגדיר: $M_{h,k}(t) = \langle (y)_h\ (z)_k \rangle$

עפ"י גזירת הפונקציה היוצרת נקבל

$$\frac{\partial^{h+k} G}{\partial y^h \partial z^k} = \sum_{r,s} P_{rs}(t)(r)_h (s)_k\, y^{r-h} z^{s-k}$$

נסמן

$$G_{h,k}(y,z,t) = \frac{\partial^{h+k} G}{\partial y^h \partial z^k}$$

ברור כי

(9) $M_{h,k} = G_{h,k}(1,1,t)$

מניחים כי ההסתברות לפגוע נוסף בזמן Δt היא:
$\beta xy\Delta t$ או במונחים של y ו- z: $\beta y(N+1-y-z)\Delta t$
ההסתברות שפגוע נוסף יעזוב את האוכלוסיה בזמן Δt
היא $\gamma y\Delta t$.

$f_{jk}(y,z)\Delta t$ - ההסתברות לשינוי ב- j של $y(t)$ ושינוי ב-k של $z(t)$ בזמן Δt.

ההסתברויות המעבר במקרה שלנו הן:

$$f_{-1,1}(y,z) = \gamma y$$

$$f_{1,0}(y,z) = \beta y(N+1-y-z)$$

לפי השיטה הכללית שהצגנו, המשוואה הדיפרנציאלית עבור G במקרה הדו-מימדי היא:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{i,j} (y^i z^j - 1) f_{i,j}\left(y\frac{\partial}{\partial y}, z\frac{\partial}{\partial z}\right) G$$

במקרה שלנו נקבל:

$$(10) \quad \frac{\partial G}{\partial t} = \beta y(y-1)\left\{N G_{1,0} - y G_{2,0} - z G_{1,1}\right\} + \gamma(z-y) G_{1,0}$$

נגזור את (10) s פעמים לפי z בעזרת כלל לייבניץ נקבל:

$$(11) \quad \frac{\partial G_{0,s}}{\partial t} = \beta y(y-1)\left\{N G_{1,s} - y G_{2,s} - z G_{1,s+1} - s G_{1,s}\right\} + \gamma\left\{(z-y) G_{1,s} + s G_{1,s-1}\right\}$$

נגזור את (11) r פעמים לפי y. נקבל:

$$(12) \quad \frac{\partial G_{r,s}}{dt} = \beta\Big\{N\left[y(y-1)G_{r+1,s} + r(2y-1)G_{r,s} + r(r-1)G_{r-1,s}\right]$$
$$-\left[y^2(y-1)G_{r+2,s} + r(3y^2-2y)G_{r+1,s} + r(r-1)(3y-1)G_{r,s} + r(r-1)(r-2)G_{r-1,s}\right]$$
$$- z\left[y(y-1)G_{r+1,s+1} + r(2y-1)G_{r,s+1} + r(r-1)G_{r-1,s+1}\right]$$
$$- s\left[y(y-1)G_{r+1,s} + r(2y-1)G_{r,s} + r(r-1)G_{r-1,s}\right]\Big\}$$
$$+ \gamma\left[(z-y)G_{r+1,s} - rG_{r,s} + sG_{r+1,s-1}\right]$$

נציב ב- (12) $y = z = 1$ ונשתמש ב- (9)

כמו כן נעשה שינוי משתנים $\tau = \beta N t$ ונסמן $\rho = \frac{\gamma}{\beta}$

נקבל:

$$(13) \quad \frac{dM_{r,s}}{d\tau} = rM_{r,s} + r(r-1)M_{r-1,s}$$
$$-\frac{1}{N}\Big\{ rM_{r+1,s} + rM_{r,s+1} + r\left[2(r-1)+s+\rho\right]M_{r,s}$$
$$+ r(r-1)M_{r-1,s+1} - \rho s M_{r+1,s-1}$$
$$+ r(r-1)(r+s-2)M_{r-1,s}\Big\}$$

נפתח את $M_{r,s}$ בטור חזקות של $\frac{1}{N}$

$$(14) \quad M_{r,s} = \mu_{r,s} + \frac{\alpha_{r,s}}{N} + \frac{\beta_{r,s}}{N^2} + \cdots$$

נציב את (14) ב- (13) ונקבל:

$$(15) \quad \frac{d}{d\tau}\left[\mu_{r,s} + \frac{\alpha_{r,s}}{N} + \frac{\beta_{r,s}}{N^2} + \cdots\right] = r\left(\mu_{r,s} + \frac{\alpha_{r,s}}{N} + \frac{\beta_{r,s}}{N^2} + \cdots\right)$$
$$+ r(r-1)\left(\mu_{r-1,s} + \frac{\alpha_{r-1,s}}{N} + \frac{\beta_{r-1,s}}{N^2}\right) - \frac{1}{N}\Big\{ r\left(\mu_{r+1,s} + \frac{\alpha_{r+1,s}}{N} + \frac{\beta_{r+1,s}}{N^2} + \cdots\right)$$
$$+ r\left(\mu_{r,s+1} + \frac{\alpha_{r,s+1}}{N} + \frac{\beta_{r,s+1}}{N^2} + \cdots\right) + r\left[2(r-1)+s+\rho\right]\left(\mu_{r,s} + \frac{\alpha_{r,s}}{N} + \frac{\beta_{r,s}}{N^2} + \cdots\right)$$
$$+ r(r-1)\left(\mu_{r-1,s+1} + \frac{\alpha_{r-1,s+1}}{N} + \frac{\beta_{r-1,s+1}}{N^2} + \cdots\right) - \rho s\left(\mu_{r+1,s-1} + \frac{\alpha_{r+1,s-1}}{N} + \frac{\beta_{r+1,s-1}}{N^2} + \cdots\right)$$
$$+ r(r-1)(r+s-2)\left(\mu_{r-1,s} + \frac{\alpha_{r-1,s}}{N} + \frac{\beta_{r-1,s}}{N^2} + \cdots\right)\Big\}$$

ע"י השוואת מקדמי $\left(\frac{1}{N}\right)^k$ $k=0,1,2$, במשוואה (15) נקבל:

(16)
$$\frac{d\mu_{r,s}}{d\tau} = r\mu_{r,s} + r(r-1)\mu_{r-1,s}$$

(17)
$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_{r,s}}{d\tau} = {} & r\alpha_{r,s} + r(r-1)\alpha_{r-1,s} - r\mu_{r+1,s} - r\mu_{r,s+1} \\ & - r\left[2(r-1)+s+\rho\right]\mu_{r,s} - r(r-1)\mu_{r-1,s+1} \\ & + \rho s\,\mu_{r+1,s-1} - r(r-1)(r+s-2)\mu_{r-1,s}\end{aligned}$$

(18)
$$\begin{aligned}\frac{d\beta_{r,s}}{d\tau} = {} & r\beta_{r,s} + r(r-1)\beta_{r-1,s} - r\alpha_{r+1,s} - r\alpha_{r,s+1} \\ & - r\left[2(r-1)+s+\rho\right]\alpha_{r,s} - r(r-1)\alpha_{r-1,s+1} \\ & + \rho s\,\alpha_{r+1,s-1} - r(r-1)(r+s-2)\alpha_{r-1,s}\end{aligned}$$

תנאי ההתחלה הם:

$$M_{r,s}(0) = \delta_{r,1}\,\delta_{s,0}$$

ומכאן נובע כי

$$\mu_{r,s}(0) = \delta_{r,1}\,\delta_{s,0}$$

$$\alpha_{r,s}(0) = \beta_{r,s}(0) = 0 \qquad (r, s = 0, 1, 2 \ldots)$$

ראשית נטפל במערכת המשוואות (16) בכדי למצוא את החלק הדטרמיניסטי המתאים לגודל אוכלוסיה אינסופי.

<u>עבור $r=1$</u>

$$\frac{d\mu_{1,s}}{d\tau} = \mu_{1,s} \quad , \quad \mu_{1,s}(0) = \delta_{s,0}$$

מכאן

$$\mu_{1,s}(\tau) = \delta_{s,0}\, e^{\tau}$$

<u>עבור $r=0$</u> נקבל

$$\mu_{0,s}(\tau) = 0$$

באופן כללי רואים כי מערכת המשוואות (16) דומה מאד למערכת המשוואות המתאימה במקרה הרב-מימדי (ראה (8)). ניתן על כן להוכיח באינדוקציה כי

$$\mu_{r,s}(\tau) = \delta_{s,0}\, r!\, e^{\tau}(e^{\tau}-1)^{r-1}$$

מכאן רואים כי המומנטים השונים של Z הם לכל היותר מסדר גודל של $\frac{1}{N}$.

נטפל עתה במערכת המשוואות (17) כלומר נמצא תיקון למומנטים הפקטוריאליים מסדר גודל של $\frac{1}{N}$ ונחשב עד $r+s=2$.

<u>עבור $r=1,\ s=0$</u>

$$\frac{d\alpha_{1,0}}{d\tau} = \alpha_{1,0} - \mu_{2,0} - \mu_{1,1} - \rho\mu_{1,0} \quad , \quad \alpha_{1,0}(0) = 0$$

מכאן

$$\alpha_{1,0}(\tau) = (2\tau - \rho\tau + 2)e^{\tau} - 2e^{2\tau}$$

עבור $r=0$ נקבל:

$$\frac{d\alpha_{0,s}}{d\tau} = \rho s \mu_{1,s-1} = \rho s \delta_{s,1} e^{\tau}$$

$$\alpha_{0,s}(0) = 0$$

מכאן:

$$\alpha_{0,s}(\tau) = \rho s \delta_{s,1} (e^{\tau} - 1)$$

מכאן רואים שהמומנט הראשון של z הוא מסדר גודל של $\frac{1}{N}$
נראה בהמשך שגם השונות היא מאותו סדר גודל.

עבור $s=0$, $r=2$ נקבל

$$\frac{d\alpha_{2,0}}{d\tau} = 2\alpha_{2,0} + 2\alpha_{1,0} - 12e^{\tau}(e^{\tau}-1)^2 - 4(2+\rho)e^{\tau}(e^{\tau}-1)$$

$$\alpha_{2,0}(0) = 0$$

מכאן:

$$\alpha_{2,0}(\tau) = \left[-(4-2\rho)\tau - 4 - 2\rho\right]e^{\tau} + \left[(12-4\rho)\tau + 16 + 2\rho\right]e^{2\tau} - 12e^{3\tau}$$

עבור $s=1$, $r=1$ נקבל:

$$\frac{d\alpha_{1,1}}{d\tau} = \alpha_{1,1} + \rho \mu_{2,0}$$

$$\alpha_{1,1}(0) = 0$$

מכאן:

$$\alpha_{1,1} = 2\rho e^{2\tau} - 2\rho(\tau+1)e^{\tau}$$

מכיוון שהמומנטים הפקטוריאליים של z הם מסדר גודל נמוך מ- $\frac{1}{N}$,
מלבד הראשון, נחשב עבורם דיוק נוסף.
נציב במערכת המשוואות (18).

<u>עבור $s=1$, $r=0$</u> נקבל

$$\frac{d\beta_{0,1}}{d\tau} = \rho\alpha_{1,0} = \rho(2\tau-\rho\tau+2)e^{\tau} - 2\rho e^{2\tau}$$

$$\beta_{0,1}(0) = 0$$

$$\Leftarrow$$

$$\beta_{0,1}(\tau) = \rho(\tau-1)(4-\rho)e^{\tau} - \rho e^{2\tau} + 5\rho - \rho^{2}$$

<u>עבור $s=2$, $r=0$</u> נקבל

$$\frac{d\beta_{0,2}}{d\tau} = 2\rho\alpha_{1,1}$$

$$\beta_{0,2}(0) = 0$$

נציב את ערך $\alpha_{1,1}$ ונקבל

$$\beta_{0,2}(\tau) = 2\rho^{2}e^{2\tau} - 4\rho^{2}\tau e^{\tau} - 2\rho^{2}$$

באותה צורה ניתן לחשב את $\beta_{1,0}$ ו $\beta_{2,0}$ ו $\beta_{1,1}$

<u>נסכם את מה שקיבלנו</u>

$$\langle Y\rangle = M_{1,0} = e^{\tau} + \frac{1}{N}\left\{(2\tau-\rho\tau+2)e^{\tau} - 2e^{2\tau}\right\} + O\left(\frac{1}{N^{2}}\right)$$

$$M_{2,0} = 2e^{\tau}(e^{\tau}-1) + \frac{1}{N}\Big\{\big[-(4-2\rho)\tau - 4 - 2\rho\big]e^{\tau}$$

$$+ \big[(12-4\rho)\tau + 16 + 2\rho\big]e^{2\tau} - 12e^{3\tau}\Big\} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

$$\langle y^2\rangle = \langle y(y-1)\rangle + \langle y\rangle = M_{2,0} + M_{1,0} =$$

$$2e^{2\tau} - e^{\tau} + \frac{1}{N}\Big\{\big[-(2-\rho)\tau - 2\rho - 2\big]e^{\tau}$$

$$+ \big[(12-4\rho)\tau + 2\rho + 14\big]e^{2\tau} - 12e^{3\tau}\Big\} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

$$\langle yz\rangle = M_{1,1} = \frac{1}{N}\big[2\rho e^{2\tau} - 2\rho(\tau+1)e^{\tau}\big] + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

$$\langle z\rangle = M_{0,1} = \frac{1}{N}\rho(e^{\tau}-1) + \frac{1}{N^2}\big[\rho(\tau-1)(4-\rho)e^{\tau} - \rho e^{2\tau} + 5\rho - \rho^2\big] + O\left(\frac{1}{N^3}\right)$$

$$\langle z(z-1)\rangle = M_{0,2} = \frac{1}{N^2}\big[2\rho^2 e^{2\tau} - 4\rho^2\tau e^{\tau} - 2\rho^2\big] + O\left(\frac{1}{N^3}\right)$$

$$\langle z^2\rangle = \langle z(z-1)\rangle + \langle z\rangle = M_{0,1} + M_{0,2} = \frac{1}{N}\rho(e^{\tau}-1)$$

$$+ \frac{1}{N^2}\Big\{\big[\rho(\tau-1)(4-\rho) - 4\rho^2\tau\big]e^{\tau} +$$

$$+ \big[2\rho^2 - \rho\big]e^{2\tau} + 5\rho - 3\rho^2\Big\} + O\left(\frac{1}{N^3}\right)$$

הערה: כל הפיתוח הנ"ל נכון בתנאי שממוצע מספר הפגועים אינו מספר גדול של N. כלומר, שמספר הפגועים קטן באופן יחסי לגודל האוכלוסיה.

—

נדון כעת בקצרה בהכללה של תנאי ההתחלה כללית.

נניח שבזמן $t=0$ מצב התהליך הוא:

$$x = N$$
$$y = a$$
$$z = 0$$

אזי

$$M_{r,s}(0) = \delta_{s,0}\, a(a-1)\cdots(a-r+1)$$

אלה יהיו תנאי ההתחלה עבור מערכת המשוואות (13).
לכן עבור מערכת המשוואות (16), כלומר עבור $\mu_{r,s}$ תנאי ההתחלה יהיו:

$$\mu_{r,s}(0) = \delta_{s,0}\, a(a-1)\cdots(a-r+1)$$

ועבור $\alpha_{r,s}$ נקבל

$$\alpha_{r,s}(0) = 0 \qquad (r,s = 0,1,2,\dots)$$

פתרון מערכות המשוואות (16), (17) עם תנאי ההתחלה אלה, עבור r,s כך ש- $r+s \le 2$ יתנו לבסוף:

$$M_{1,0}(\tau) = a e^{\tau} + \frac{1}{N}\left\{\left[a(a+1) - a(\rho-2)\tau\right] e^{\tau} - a(a+1) e^{2\tau}\right\} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

$$M_{2,0}(\tau) = a e^{\tau}\left[(a+1)e^{\tau}-2\right] + \frac{1}{N}\left\{\left[-4-2\rho+2(\rho-2)\tau\right]e^{\tau} + \left[(12-4\rho)\tau+2(8+\rho)\right]e^{2\tau} - 12e^{3\tau}\right\} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

$$M_{0,1}(\tau) = \frac{1}{N}\rho a\left(e^{\tau}-1\right) + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

$$M_{0,2}(\tau) = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

$$M_{1,1}(\tau) = \frac{1}{N}\left[-\rho a(a+1+2\tau)e^{\tau} + \rho a(a+1)e^{2\tau}\right] + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

$$=$$

נחזור למקרה הפרטי $a = 1$.

להלן ניתן דוגמאות מספריות עבור ממוצע מספר הנגעים.

קיבלנו ש- $\langle y \rangle = e^{\tau} - \dfrac{2e^{2\tau} + [\rho\tau - 2(\tau+1)]e^{\tau}}{N}$

נחלק את y לשני חלקים.

החלק הדטרמיניסטי המתאים לגודל אוכלוסיה אינסופי שהוא $\mu_{10} = e^{\tau}$

התיקון הנובע מסופיות האוכלוסיה ומ- ρ נסמנו

$$\alpha_{1,0} = \Delta = -\frac{2e^{2\tau} + [\rho\tau - 2(\tau+1)]e^{\tau}}{N}$$

נבחר ערכים שונים של- N, τ, e^{τ}

$N = 1000$

$\tau = 4.6$, $e^{\tau} = 100$

נקבל שהחלק הדטרמיניסטי

$\mu_{1,0} = 100$

עבור $\rho = 0$ $\Delta = -18.9$

עבור $\rho = 1$ $\Delta = -19.4$

עבור $\rho = 10$ $\Delta = -23.5$

עבור $\rho = 50$ $\Delta = -41.9$

$\tau = 5.5$, $e^{\tau} = 250$

$\mu_{1,0} = 250$

עבור $\rho = 0$ $\Delta = -122$

עבור $\rho = 1$ $\Delta = -123$

עבור $\rho = 10$ $\Delta = -135$

עבור $\rho = 50$ $\Delta = -190$

משני מקרים אלה רואים כי התיקון הנובע מהספילובר בלבד, כלומר $\rho=0$, הנו משמעותי מאד. גם מקבל למקרה הדו-מימדי. התיקון הנובע מ-ρ הולך וגדל ככל ש-ρ גדל.

נעבור למקרה שבו גודל האוכלוסיה $N = 10{,}000$

$\tau = 6.21 \, , \quad l^{\tau} = 500$

$\mu_{1,0} = 500$

עבור $\rho = 0$ $\quad \Delta = -49.3$

עבור $\rho = 10$ $\quad \Delta = -52.4$

עבור $\rho = 50$ $\quad \Delta = -64.8$

עבור $\rho = 100$ $\quad \Delta = -80.3$

כאן רואים כי מכיון שגודל האוכלוסיה הרבה יותר גדול הרי התיקון הנובע מספילובר האוכלוסיה קטן יותר אך גם כן משמעותי.

$\mu_{1,0} = 1000$

$\tau = 6.91 \, , \quad l^{\tau} = 1000$

עבור $\rho = 0$ $\quad \Delta = -198$

עבור $\rho = 10$ $\quad \Delta = -205$

עבור $\rho=50$ $\Delta=-233$

עבור $\rho=100$ $\Delta=-267$

$\mu_{1,0}=2000$ $\tau=7.6$, $e^{\tau}=2000$

עבור $\rho=0$ $\Delta=-796$

עבור $\rho=10$ $\Delta=-811$

עבור $\rho=50$ $\Delta=-872$

עבור $\rho=100$ $\Delta=-948$

מדוגמאות אלה רואים כי התיקונים הנובעים מטיפול האלגוסיה
הם מאוד משמעותיים וכי גם המעבר למודל דו-ממדי מהמודל
התלת-ממדי הוא בעל חשיבות.

References

1. N. T. J. Bailey, Biometrika 55, 199 (1968)

2. D. R. McNeil, Biometrika 59, 494 (1972)

3. N. G. Van Kampen, Biometrika 60, 419 (1973)

4. G. H. Weiss (private comunication)

5. N. T. J. Bailey, The Math. Theory of Epidemics, 1957 ©

6. N. T. J. Bailey, The elements of Stochastic Processes © 1964